





منه فانه

$$(z - z_0) f(z) = b_1 + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^{n+1} + \dots$$

ومن هذه العلاقة نستنتج انه

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = b_1$$

ومن هذه العلاقة نستنتج انه اذا كان  $z_0$  قطب بسيط فانه قيمة الراس  
للدالة  $f$  عند القطب تعبر بالعلاقة الآتية

$$\text{Res } f(z) = b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

اما اذا كانت  $z_0$  قطب من الرتبة  $m$  عندئذ يمكن ان تكون للدالة  $f$  تفرعات الآتية ...

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots$$

نضرب الطرفين بالمعادلة  $(z - z_0)^m$  فنحصل على

$$(z - z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + b_{m-2}(z - z_0)^2 + \dots + b_1(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + a_1(z - z_0)^{m+1} + \dots$$

باستقانة طرفي هذه العلاقة  $m-1$  مرة نحصل انه

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) = b_1(m-1)! + a_0 m(m-1) + \dots + (m-1)a_{m-1}(z - z_0)$$

ومنه فانه

$$b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z)$$

وبالتالي

$$\text{Res } f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z)$$

لهذا الشكل نكون قد استأنهنا ان هذه الآتية  
البرهنة (نقطة)

اذا كانت  $f(z)$  دالة مفردة في  $z_0$  قطب لهذه الدالة

أولاً: فانه عندما  $z$  قطب من الرتبة الأولى فانه

$$\text{Res } f(z) = b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

ثانياً: اذا كانت  $z_0$  قطب من الرتبة  $m$  عندئذ

$$\text{Res } f(z) = b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z)$$



مثال 1-1  
 لنكن لدينا الدالة  $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$  النقطة  $z=0$  هي النقطة الشاذة  
 الوحدية لهذه الدالة.

الحل:  
 بما أن  $z=0$  هي نقطة الرتبة الثانية للقام، ونرى، لدرجة الأولى للسطح  $\infty$  بأنه

$$f(z) \text{ هي نقطة من الرتبة الأولى للدالة } f(z)$$

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^z - 1}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = \frac{0}{0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{1} = 1$$

نمكن إيجاد قيمة الراسية عن طريق النشر

مثال 2-  
 لنكن لدينا الدالة  $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$  عن النقاط الشاذة، وأد هي قيمة الراسية عند  $z=0$

الحل:  
 النقطة  $z=0$  هي نقطة الشاذة  $z=0$ ، بما أن  $z=0$  هي نقطة الرتبة الرابعة للقام  
 ونرى، لدرجة الأولى، أن السطح هنا غير نهائي  $z=0$  هي نقطة من الرتبة الثالثة للدالة  $f$

$$\text{وعندئذٍ}$$

$$\text{Res } f(z) = b_1 = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} (z)^3 \frac{\sin z}{z^4}$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left( \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\cos z - z \sin z - \cos z) z^2 - 2z(z \cos z - \sin z)}{z^4}$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z^3 \sin z - 2z^2 \cos z + 2z \sin z}{z^4} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{حالة عدم تعيين}$$

لا زالت مستقيم أوسيل

$$b_1 = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-3z^2 \sin z - z^3 \cos z - 4z \cos z + 2z^2 \sin z + 2 \sin z + 2z \cos z}{4z^3}$$

$$= \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين لا زالت مستقيم أوسيل

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-6z \sin z - 3z^2 \cos z - 3z^2 \cos z + z^3 \sin z - 4 \cos z + 4z \sin z + 4z \sin z}{12z^2}$$

$$\rightarrow \frac{+2z^2 \cos z + 2 \cos z + 2 \cos z - 2z \sin z}{12z^2} = \frac{0}{0}$$

نعود ونفهم أوسيل

كلوها كما كن

نعود ونفهم أوسيل

7



نكتب الحد بفرع منه الراس عند طرفه، لنشر

$$\sin z = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \frac{1}{7!} z^7$$

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} z + \dots$$

$$b_1 = -\frac{1}{3!} \Rightarrow \operatorname{Res} \frac{\sin z}{z^4} = -\frac{1}{6}$$

\* إذا كانت  $z$  نقطة شاذة أساسية لدالة  $f(z)$  عند  $z_0$ ، فنكتب  
لهذه الدالة عند نقطة الشاذة الأساسية لا عدد استجابة، إلا  
عن طريق النشر.

\* ~~مبرهنة ليكامل~~ ~~المعادلة~~ ~~للمعادلة~~ ~~بالشكل~~

ملاحظة: إذا كان  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  وكانت  $z_0$  نقطة شاذة لدالة  $f(z)$ ، ونكتب:

$$p(z_0) \neq 0, \quad q(z_0) = 0, \quad q'(z_0) \neq 0 \text{ عند } z_0:$$

$$b_1 = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

مثال: لنكتب لدالة

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2-z} \text{ عن المقام، شاذة ديس نو، الراس عند كل فرع.}$$

الحل: المقام شاذة في  $z=0$  و  $z=1$ ، كلاهما

نقطة شاذة، الأولى للمقام لا نعزم البسط أي أنه  $z=0$ ،  $z=1$  كلاهما نقطة شاذة

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \left. \frac{z+1}{2z-1} \right|_{z=0} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \left. \frac{z+1}{2z-1} \right|_{z=1} = \frac{2}{1} = 2$$

\* دالة نظرية لورانس



\* **مبرهنة التكامل** : القاعدة الخامسة بالتكامل : <sup>سؤال على صيغة تكامل كوشي</sup>

**نظريته الرواسب** : <sup>سؤال عن نظرية الرواسب</sup>

لتكن  $f$  دالة متغير عقدي على عدد منته من نقاط  $z_1, z_2, \dots, z_k$  شاذة لمعدلة  $R$  والتي تقع جميعها ضمن دائرة  $C$  مركزها نقطة الأصل، نصف قطرها  $R$  عندئذ يكون :

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{z=z_j} f(z)$$

الإثبات :

لنأخذ  $z_1, z_2, \dots, z_k$  نقاط شاذة تقع في الدائرة  $C$  عندئذ  $C_j \cap C_e = \emptyset$  حيث  $(j=1, 2, \dots, k)$   $C_j$  دائرة  $C$  مركزها نقطة  $z_j$  نصف قطرها  $\epsilon_j$   $\epsilon_j \neq 0$  رافعات  $C$  على مبرهنة كوشي فحاصلات لها فخر لمعدلة  $R$  لا رابط يكون

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_k} f(z) dz$$

و استنادا إلى تعريف الرواسب يكون :

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z=z_1} f(z) + 2\pi i \text{Res}_{z=z_2} f(z) + \dots + 2\pi i \text{Res}_{z=z_k} f(z)$$

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{z=z_j} f(z) \quad j \neq e$$

مثال

اعتمادا على مبرهنة الرواسب احسب صيغة التكامل الآتية :  $\int_C \frac{2z}{z^2+1} dz$  حيث  $C$  هي دائرة  $|z|=3$

**الحل :** اللغات لمعدلة  $R=3$  دائرة  $C$  التي مركزها نقطة الأصل، نصف قطرها  $R=3$  النقاط الشاذة هي :  $z^2+1=0 \Rightarrow z^2=-1 \Rightarrow z^2=i^2 \Rightarrow z=i \wedge z=-i$

$$z_1 = i \quad \wedge \quad z_2 = -i$$

إن كل من  $z_1=i$  و  $z_2=-i$  عبارة عن نقطة بسيطة (أول)  $z=i$  و  $z=-i$  كل منها صفر من الدالة الأصلية  $f(z)$ ، لا نعزم البسط  $f(z)$  وبالتالي فإن :

$$\text{Res}_{z=i} \frac{2z}{z^2+1} = \left. \frac{2z}{z^2+1} \right|_{z=i} = 1 \quad , \quad \text{Res}_{z=-i} \frac{2z}{z^2+1} = \left. \frac{2z}{z^2+1} \right|_{z=-i} = 1$$



$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{2z}{z^2+1} dz = 2\pi i (1+1) = 4\pi i$$

طريقة التكامل كوشي

اللفاف المعطى هو دائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها  $R=3$ .  
النقاط الشاذة هي  $z=i$  و  $z=-i$  النقطتان تقعان في داخلية اللفاف.

حيث  $z=i$  دائرة  $C_1$  نصف قطرها صغيرا كافيا  
حيث  $z=-i$  دائرة  $C_2$  نصف قطرها صغيرا كافيا  
يمكننا كتابة  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$   
 $C_1 \cap \gamma = \emptyset$ ,  $C_2 \cap \gamma = \emptyset$

عندئذ حسب مبرهنه كوشي هو مساو للمجموع المتعدد للناظير يكون:

$$\int_{\gamma} \frac{2z}{z^2+1} dz = \int_{C_1} \frac{2z}{(z-i)(z+i)} dz + \int_{C_2} \frac{2z}{(z-i)(z+i)} dz$$

$$= \int_{C_1} \frac{2z}{z-i} dz + \int_{C_2} \frac{2z}{z+i} dz = 2\pi i \left[ \frac{2z}{z-i} \right]_{z=i} + 2\pi i \left[ \frac{2z}{z+i} \right]_{z=-i}$$

$$= 2\pi i (1) + 2\pi i (1) = 4\pi i$$

مسألة 2.

اعطى دالة مبرهنه لرواسب التكامل  $f(z) = \int_{\gamma} \frac{e^z - 1}{z(z-3)(z+1)} dz$   
حيث  $\gamma$  هي الدائرة  $|z|=2$

لغرضنا في كثير من الاحوال نستخدم الدائرة

الحل: اللفاف المعطى هو دائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها  $R=2$

النقاط الشاذة هي  $z=0$  و  $z=3$  و  $z=-1$

أي أن  $z=0, z=-1, z=3$

• نلاحظ بأن  $z=0$  تقع في داخلية اللفاف

• يكون صفر الدالة الأولى للـ  $z=0$  صفر الدالة الأولى للـ  $z=3$  و  $z=-1$  تقع خارج اللفاف

$$\text{Res}_{z=0} f(z) = \text{Res}_{z=0} \frac{e^z - 1}{z(z-3)(z+1)} = 0$$

• نلاحظ بأن  $z=-1$  صفر الدالة الأولى للـ  $z=3$  و  $z=-1$  تقع خارج اللفاف

$$\text{Res}_{z=-1} \frac{e^z - 1}{z(z-3)(z+1)} = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{e^z - 1}{z(z-3)(z+1)} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z - 1}{z(z-3)} = \frac{e^{-1} - 1}{-1(-4)} = \frac{1 - e^{-1}}{4}$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^z - 1}{z(z-3)(z+1)} dz = 2\pi i \left( 0 + \frac{1 - e^{-1}}{4} \right)$$



مسألة: احسب قيمة التكامل  $\int_C \frac{1}{z} e^{\frac{1}{z}} dz$  حيث  $C$  هي دائرة  $|z|=1$

الحل: النظام لشدة هي نقطة  $z=0$

$$\frac{1}{z} e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \dots \right) \quad 0 < |z|$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6} \frac{1}{z^4} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{n+1}} + \dots$$

هنا نقطة  $z=0$  هي نقطة شدة أساسية لأنه الجذر الرئيسي يتكون

من عدد غير صفري من الحدود، الراسب هو  $b_1$  و  $b_1 = 1 \leftarrow$

$$\text{Res} \frac{1}{z} e^{\frac{1}{z}} = 1 \Rightarrow \int_C \frac{1}{z} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i$$

تعريف الراسب في الدائرة:

لتكن  $f(z)$  دالة مستمرة في جميع نقاط شدة بعض داهلية دائرة  $C$

التي مركزها نقطة الأصل، نصف قطرها  $R$

$\leftarrow$  لهذا نحن أنه دائرة في طارحية الدائرة هي دالة كلية

$\leftarrow$  لهذا نحن أنه نقطة الدائرة هي نقطة شدة معدولة

اصطلاح العلماء أنه الاتجاه الموحي بالدائرة للدوران هو الاتجاه الذي يوافق دوران عقارب الساعة

• ومع تعريف نقطة الراسب للدالة  $f$  في الدائرة من العلاقة:

$$\text{Res}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

من العلاقة الأخيرة نستنتج أنه نتيجة الراسب على الحاصل على من خلال مشور الدالة  $f$  جوار الدائرة معين  $b_1$  ومن ثم يتبرر بـ 1-

ملحظة:

من خلال ما ذكرناه في أسطر من داهلية الدائرة نستنتج أنه إذا كانت

نقطة الدائرة هي من الدرجة الثانية أو أكثر عند تبعا حقيقة الراسب عند الدائرة تكون صارية الصفر.



مبرهن في النهاية في المخرج عقدي 12

إذا كانت  $f(z)$  دالة صغيرية وكانت  $z_1, z_2, \dots, z_k$  نقاط شاذة لهذه الدالة عندئذ:

$$\sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

**الإثبات:**

لتكن  $C$  دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها  $R$  بحيث أنه جميع النقاط الشاذة للدالة  $f(z)$  تقع خارج الدائرة عندئذ حسب مبرهنه الرواسب:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z) \quad \dots (1)$$

حسب تعريف قية الراسب في اللانهاية تكون:

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C} f(z) dz \quad \text{تقريباً لـ } 2\pi i$$

ومنه فإن:

$$2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \int_{-C} f(z) dz$$

واعتماداً على خواص التكامل فإن:

$$2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = - \int_C f(z) dz \quad \dots (2)$$

ومن (1) و (2) نستنتج أنه:

$$\sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

**تمرين:**

\* حسب قية التكامل اعتماداً على مبرهنه الرواسب:

$$\int \frac{2z+3}{(z^6-64)(z+4)} dz = \dots$$

$C$  هي دائرة  $|z|=3$

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^6 \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z)$$

الحل: اللغات هي لدائرة ليس مركزها نقطة الأصل، نصف قطرها  $R=3$

النقاط الشاذة هي حينها طعناولة

$$(z^6-64)(z+4) = 0$$

أو  $z = -4$  تقع خارج دائرة اللغات، الحقيقة هي  $z = -4$  (لأنه صفر من الدرجة الأولى للقائم، و  $z = -4$  عدم البسط)



$$z^6 - 64 = 0 \Rightarrow z^6 = 64 \Rightarrow z = (64)^{\frac{1}{6}}$$

أو

$$\sum_{j=1}^6 \operatorname{Res} f(z) + \operatorname{Res} f(z)_{z=-4} + \operatorname{Res} f(z)_{\infty} = 0$$

والتي تأتي على

وعلى نقطة اللانهاية، دراسة الدالة المستقيمة

$$\operatorname{Res} f(z)_{z=\infty} = 0$$

$$\operatorname{Res} \frac{2z+3}{z^6-64} = \lim_{z \rightarrow -4} (z+4) \frac{2z+3}{(z^6-64)(z+4)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow -4} \frac{2z+3}{z^6-64} = \frac{-5}{4096-64} = \frac{-5}{4032}$$

ومن هنا نرى:

$$\sum_{j=1}^6 \operatorname{Res} f(z) = \frac{5}{4032} + 0 = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^6 \operatorname{Res} f(z) = \frac{5}{4032}$$

وبالتالي فإن قيمة التكامل هي:

$$= 2\pi i \left( \frac{5}{4032} \right) = \frac{5\pi i}{2016}$$

الذي هو الجواب.